

NATÜRLICHE FORMALITÄTEN I:  
BEGRIFFSANALYSE UND LOGISCHE ANALYSE

Eine logische Analyse wird verwendet um die Gültigkeit von Schlüssen zu beurteilen. Ein Schluss ist genau dann gültig, wenn aus der Wahrheit der Prämissen notwendig die Wahrheit der Konklusion folgt. Betrachten wir einen Vorzeigeschluss:

$$\frac{\text{Wenn es regnet, dann ist die Strasse nass.} \\ \text{Es regnet}}{\text{Die Strasse ist nass.}} \quad (1)$$

Ist es möglich, dass die beiden Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch? Scheinbar nicht; der Schluss ist gültig. Woran erkennen wir die Gültigkeit? Natürlich: An der Form. Aufgabe der logischen Analyse ist es die Form des Schlusses zu erkennen und zu beurteilen. Die Form eines Schlusses ist gültig, wenn *sie* es unmöglich macht, dass die Prämissen wahr sind während die Konklusion gleichzeitig falsch ist. Die Frage 'Was ist die Form eines Schlusses?' kann am einfachsten negativ beantwortet werden: Die Form ist all das was nicht Inhalt ist. Die beliebteste Methode für die Durchführung einer logischen Analyse ist die Übersetzung des Schlusses in einen formalen Kalkül. Eine Übersetzung bietet zwei entscheidende Vorteile: Erstens wird die Form des Schlusses in übersetzter Form besser sichtbar und zweitens bietet ein Kalkül die Möglichkeit die Gültigkeit einer Schlussform zu überprüfen. Um (1) in den aussagenlogischen Kalkül zu übersetzen ersetzen wir ganz einfach die Aussage 'es regnet' durch  $p$  und 'die Strasse ist nass' durch  $q$ , 'wenn, dann' ordnen wir die aussagenlogische Konstante ' $\rightarrow$ ' zu. Was bleibt ist das nackte Gerüst, die reine Form des Schlusses:

$$\frac{p \rightarrow q \\ p}{q} \quad (2)$$

Innerhalb des aussagenlogischen Kalküls kann gezeigt werden, dass es sich dabei um eine gültige Schlussform handelt. Jeder Schluss, der diese Form aufweist, ist gültig. Somit hat eine logische Analyse die Gültigkeit von (1) ergeben.

Wir alle haben gewisse Intuitionen bezüglich der Gültigkeit von Schlüssen. Eine logische Analyse soll nur die Schlüsse als gültig auszeichnen, die wir auch intuitiv für gültig befinden. Weiter soll sie möglichst alle intuitiv für gültig befundenen Schlüsse als solche auszeichnen. Beides ist bei (1) und seiner logischen Analyse der Fall. Der folgende Schluss ist unserer Intuition zufolge ebenfalls gültig:

$$\frac{\text{Frau Tschudi ist eine Grossmutter.} \\ \text{Frau Tschudi ist eine Frau.}}{\quad} \quad (3)$$

Kann ihn eine logische Analyse als gültig ausweisen? Versuchen wir eine Analyse analog zu obiger:

$$\frac{p}{q} \quad (4)$$

Dies ist sicher keine gültige Schlussform. Handelt es sich deshalb um einen ungültigen Schluss?

(3) scheint weniger aufgrund seiner Form als vielmehr wegen der Bedeutung des Begriffs 'Grossmutter' gültig zu sein. Mit der Bedeutung befasst sich eine Begriffsanalyse. Kann eine Begriffsanalyse (3) als gültig auszeichnen?

Eine Begriffsanalyse beschreibt die Verwendung eines Begriffs. Bestenfalls liefert sie notwendige und hinreichende Bedingungen für die Verwendung eines Begriffes. Eine Begriffsanalyse von 'Grossmutter' liefert mir eine Beschreibung der Verwendung des Begriffs 'Grossmutter'. Im besten Fall liefert sie mir hinreichende und notwendige Bedingungen für die Anwendbarkeit von 'Grossmutter'. Beispielsweise: Um als Grossmutter bezeichnet zu werden muss eine Person folgende Bedingungen erfüllen: i) Es muss sich um eine Frau handeln. ii) Diese Frau hat mindestens ein Kind zur Welt gebracht, ist folglich Mutter. iii) Das von dieser Frau zur Welt gebrachte Kind muss entweder Mutter sein oder Vater sein. Zurück zur Frage: Kann eine Begriffsanalyse von 'Grossmutter' die Gültigkeit von (3) nachweisen? Ja, sie kann, aber nicht direkt. Die Begriffsanalyse liefert uns lediglich die Wahrheit der Aussage 'Wenn jemand eine Grossmutter ist, dann ist es eine Frau.'. Diese Aussage kann als zusätzliche Prämisse in den Schluss eingehen.

Frau Tschudi ist eine Grossmutter.  
Wenn jemand eine Grossmutter ist, dann ist es eine Frau. (5)  
 Frau Tschudi ist eine Frau.

Eine logische Analyse des um diese Prämisse ergänzten Schlusses ergibt, dass er gültig ist.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p} \\ q \end{array} \quad (6)$$

(3) war also in gewissem Sinne unvollständig und deshalb kein gültiger Schluss. Eine Begriffsanalyse lieferte eine zusätzliche Prämisse mit der (3) zu einem gültigen Schluss erweitert werden konnte. Dass intuitiv bereits der unvollständige Schluss gültig erschien, kann einfach erklärt werden: Die Intuition ergänzt den Schluss automatisch um die zweite Prämisse, da es für einen kompetenten Sprecher eher trivial erscheint, dass alle Grossmütter Frauen sind. Dass Prämissen ausgelassen bzw. implizit vorausgesetzt werden, kommt bei den besten Denkern vor und wurde bereits von Gottlob Frege festgestellt:

Selbst ein so gewissenhafter und strenger Schriftsteller wie Euklid macht vielfach stillschweigend von Voraussetzungen Gebrauch, die er weder unter seinen Grundsätzen noch unter den Voraussetzungen des besonderen Satzes aufführt. So benutzt er im Beweise des 19. Satzes des ersten Buches der Elemente (in jedem Dreiecke liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber) stillschweigend die Sätze:

1. Wenn eine Strecke nicht grösser als eine andere ist, so ist sie gleich dieser oder kleiner als diese.
2. Wenn ein Winkel gleich einem andern ist, so ist er nicht grösser als dieser.
3. Wenn ein Winkel kleiner als ein anderer ist, so ist er nicht grösser als dieser.

Der Leser wird indessen das Überspringen dieser Sätze nur bei besonderer Aufmerksamkeit gewahr, zumal weil sie den Denkgesetzen selbst an Ursprünglichkeit so nahe zu kommen scheinen, dass sie wie jene selbst gebraucht werden. Ein streng abgegrenzter Kreis von Formen des Schliessens ist in der Sprache eben nicht vorhanden, so dass ein lückenloser Fortgang an der sprachlichen Form von einem Überspringen von Zwischengliedern nicht zu unterscheiden ist. [...] Die logischen Verhältnisse werden durch die Sprache fast immer nur angedeutet, dem Erraten überlassen, nicht eigentlich ausgedrückt.<sup>1</sup>

Die Wahrheit der Sätze 1 bis 3 ergibt sich aus einer Analyse der Begriffe 'grösser', 'kleiner' und 'gleich'. 1 bis 3 gehen dann als zusätzliche Prämissen in den Beweis von Satz 19 ein.

Allgemeiner bedeutet dies: Eine Begriffsanalyse rechtfertigt nicht direkt Schlüsse. Aus der Begriffsanalyse gewonnene Informationen können aber als Prämissen in einen Schluss einfließen. In dieser Hinsicht ist eine Begriffsanalyse auf der selben Stufe wie eine empirische Untersuchung, deren Resultate ebenfalls als Prämissen für einen Schluss dienen können. Solche empirischen Befunde werden in einem Schluss ebenfalls oft lediglich implizit vorausgesetzt:

Das Flugzeug wurde vom Blitz getroffen und hat beide Flügel verloren.  
Das Flugzeug ist abgestürzt. (7)

(7) ist nicht gültig, weil nicht vollständig. Die Wahrheit der fehlenden Prämisse 'Flugzeuge ohne Flügel stürzen ab.' ist allerdings so offensichtlich, dass kaum jemand an der Gültigkeit von (7) zweifeln würde.

Mit dieser Auffassung vom Verhältnis zwischen Begriffsanalyse und logischer Analyse sind die Zuständigkeitsbereiche der beiden Analysen klar unterschieden und voneinander abgegrenzt: Erstere dienen dazu, die Wahrheit gewisser Aussagen festzustellen, letztere die formale Gültigkeit eines Schlusses. In diesem Zusammenhang noch eine terminologische Unterscheidung: Wir wollen eine Aussage, die allein aufgrund der Bedeutung der in ihr vorkommenden Begriffe wahr ist eine analytisch wahre Aussage nennen. Einen Schluss, dessen Form es unmöglich macht, dass alle Prämissen wahr sind während die Konklusion falsch ist nennen wir Tautologie.

Die in diesem schönen Bild gezeichnete Grenze zwischen logischer Analyse und Begriffsanalyse ist in Wirklichkeit keine so scharfe. Beim Zeichnen wurde ignoriert, dass es *die* logische Analyse nicht gibt, *die* Form eines Schlusses und *den* formal gültigen Schluss deshalb ebensowenig. Dazu einige Beispiele im Eiltempo. Der Schluss von 'Frau Tschudi ist eine rüstige Grossmutter.' auf 'Frau Tschudi ist eine Grossmutter.' scheint gültig zu sein. Können wir uns doch kaum eine Situation vorstellen in der die Prämisse wahr, die Konklusion aber falsch ist. Versuchen wir eine logische Analyse analog zum obigen Beispiel. Indem wir jedem Satz einen Buchstaben zuordnen erhalten wir:

$$\frac{p}{q} \quad (8)$$

Dabei handelt es sich offensichtlich um eine ungültige Schlussform. Hier stossen wir

---

<sup>1</sup>G. Frege (1882), 'Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift', *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 81; pp. 48-56

bereits auf ein erstes Problem. Die Übersetzung eines Schlusses aus der natürlichen Sprache in einen formalen Kalkül ist nicht so offensichtlich wie es bei (1) schien. Wir könnten beispielsweise argumentieren, dass 'Frau Tschudi ist eine rüstige Grossmutter.' eine Abkürzung sei von 'Frau Tschudi ist rüstig und Frau Tschudi ist eine Grossmutter' und der Schluss in einem aussagenlogischen Kalkül folglich so dargestellt werden müsste:

$$\frac{p \wedge q}{q} \quad (9)$$

Man sieht leicht ein, dass es sich dabei um eine gültige Schlussform handelt. Der gleiche Schluss, der in (8) in ungültiger Form dargestellt und folglich als ungültig bezeichnet wurde, wird in (9) in gültiger Form dargestellt und ist somit gültig.

Noch ein Beispiel: Der Schluss von 'Grossmutter Tschudi strickt schnell' auf 'Grossmutter Tschudi strickt' bereitet intuitiv keine Schwierigkeiten. Diesen Schluss können wir aber auch nach geschickter Umformulierung der Prämissen aussagenlogisch nicht in gültiger Form darstellen. Hingegen können wir ihn in einem trickreicheren Kalkül problemlos in einer gültigen Schlussform darstellen: Wir nehmen eine Prädikatenlogik erster Stufe in der wir über Ereignisse quantifizieren können.

$$\frac{(\exists x)(x \text{ ist ein Stricken von Grossmutter Tschudi} \wedge x \text{ ist schnell})}{(\exists x)(x \text{ ist ein Stricken von Grossmutter Tschudi})} \quad (10)$$

Und gleich noch ein Beispiel:

$$\frac{\text{Grossmutter Tschudi weiss, dass die Strasse nass ist, wenn es regnet.}}{\text{Grossmutter Tschudi weiss, dass es regnet.}} \quad (11)$$

Grossmutter Tschudi weiss, dass die Strasse nass ist.

Ist (11) aufgrund seiner Form gültig? Durch eine prädikatenlogische Darstellung können wir ihn sicher nicht als solchen auszeichnen. Dagegen handelt es sich bei einer Darstellung dieses Schlusses in einer epistemischen Logik um eine gültige Schlussform. Denn die epistemische Logik verfügt unter anderem über einen Wissensoperator  $\mathcal{W}$  und eine Ableitungsregel  $\mathcal{W}_a(P(x)) \wedge \mathcal{W}_a(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \mathcal{W}_a(Q(x))$ . In den letzten beiden Beispielen also zweimal das selbe Bild: Ein Schluss, dessen Darstellung in einer Logik eine ungültige Form aufweist, kann in einer anderen Logik in gültiger Form dargestellt werden. Dies führt zur Frage, ob eine geeignetere Analyse fähig wäre (3) ebenfalls als gültig aufgrund der Form auszuweisen. Wir basteln einen Grossmutterkalkül, indem wir die Prädikatenlogik um den Grossmutteroperator  $\mathcal{G}$ , den Mutteroperator  $\mathcal{M}$  und die Ableitungsregel  $\mathcal{G} \vdash \mathcal{M}$  erweitern. (3) kann nun formalisiert werden als

$$\frac{\mathcal{G}(x)}{\mathcal{M}(x)} \quad (12)$$

Dies ist offensichtlich eine gültige Schlussform und (3) somit ein Schluss dessen Gültigkeit nur von seiner Form abhängt. Man mag sich nun fragen woher wir die Ableitungsregeln für einen solchen Kalkül nehmen. Die Antwort ist so einfach wie verwirrend: Aus einer Begriffsanalyse. Die Ableitungsregel  $\mathcal{G} \vdash \mathcal{M}$  erhalten wir durch eine Begriffsanalyse von 'Grossmutter' ( $\mathcal{W}_a(P(x)) \wedge \mathcal{W}_a(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \mathcal{W}_a(Q(x))$  durch eine Analyse von 'Wissen'). Um einen Kalkül zu basteln wird eine Begriffsanalyse der umgangssprachlichen Begriffe vorgenommen, denen im Kalkül logische Konstanten zugeordnet werden sollen. Die aus der Begriffsanalyse gewonnene Information über diese Begriffe und den

Zusammenhang zu anderen Begriffen wird in Form von Ableitungsregeln im Kalkül konserviert. Gilt es nun einen konkreten Schluss auf seine Gültigkeit hin zu überprüfen, so kann dazu der Kalkül mit der in ihm konservierten Information helfen.

Dies ergibt ein neues Bild vom Zusammenhang (neu: Zusammenspiel) zwischen Begriffsanalyse und logischer Analyse: Der Schluss von 'Frau Tschudi ist eine Grossmutter.' auf 'Frau Tschudi ist eine Frau.' ist intuitiv gültig. Eine Analyse des Schlusses soll zeigen, weshalb dieser Schluss für gültig befunden wird. Die erste Lösung bestand darin zu sagen, dass der Schluss wegen seiner Unvollständigkeit zwar ungültig ist, durch eine Begriffsanalyse von 'Grossmutter' aber zu einem gültigen Schluss vervollständigt werden kann. Die Antwort ist: Der Schluss wird für gültig befunden, weil eine fehlende Prämisse, welche den Schluss aufgrund seiner Form gültig macht, so offensichtlich ist, dass sie automatisch dazugedacht wird. Die andere Lösung unserer Intuition bezüglich der Gültigkeit von (3) gerecht zu werden bestand darin, die logische Analyse so zu gestalten, dass der Schluss eine gültige Form aufweist, konkret: (3) mit Hilfe des Grossmutterkalküls zu analysieren. Es gilt: Je mehr Aufwand in die Begriffsanalyse beim Basteln des Kalküls investiert wird, umso weniger Begriffsanalyse wird danach noch notwendig sein um bei der logischen Analyse zusätzliche Prämissen zu generieren. Auf den von Frege zitierten Beweis von Euklid übertragen heisst das: Anstatt wie oben vorgeschlagen das aus der Begriffsanalyse von 'kleiner', 'grösser' und 'gleich' gewonnene Wissen in Form von Prämissen in den Schluss einfließen zu lassen könnte für die Analyse ein Kalkül gewählt werden, der den drei Begriffen logische Konstanten zuordnet und aus dem aus der Begriffsanalyse gewonnenen Wissen Ableitungsregeln im Bezug auf diese Konstanten generieren. Dieser Auffassung zufolge ist Logische Analyse lediglich eingemachte Begriffsanalyse, ihre Verwendung nie notwendig sondern höchstens praktisch.

Der Vorteil ist offensichtlich: Es kann gezeigt werden, dass (3) aufgrund seiner Form ein gültiger Schluss ist. Dies kann sehr praktisch sein. Ebenso offensichtlich ist das Problem: Die Unterscheidung zwischen Form und Inhalt kann nicht mehr aufrechterhalten werden. (3) ist ebenso aufgrund seiner Form gültig wie (1). Der Schluss von 'Peter fährt Velo.' auf 'Peter fährt Zweirad.' ist gültig aufgrund seiner Form (dies kann im Fahrradkalkül gezeigt werden). Wollen wir das?

Wenn es irgendwie möglich ist dies zu verhindern, so wäre das schön. Dazu brauchen wir aber ein Kriterium, das uns befähigt, der willkürlichen Einführung von logischen Konstanten in den Kalkül, der unsere natürliche Sprache abbilden soll, ein Ende zu bereiten. Die vielversprechendsten Kandidaten für ein solches Kriterium waren bisher: Themenneutralität, Wahrheitskonditionalität und Exaktheit. Davon konnte aber keiner befriedigend als Kriterium für logische Konstanten dienen<sup>2</sup>. So hat bereits Tarski festgestellt:

Unserer ganzen Konstruktion liegt die Einteilung aller Termini der betrachteten Sprache in logische und ausserlogische zugrunde. [...] (Mir sind) keine objektiven Gründe bekannt, die eine scharfe Grenze zwischen beiden Gruppen von Termini zu ziehen gestatten; es scheint möglich zu sein, zu den logischen auch solche Termini zu rechnen, die von den Logikern gewöhnlich als ausserlogisch betrachtet werden, ohne dabei auf Konsequenzen zu stossen, die mit dem üblichen Sprachgebrauch in starkem Kontrast stehen

---

<sup>2</sup>vgl. z.Bsp.: Susan Haack (1978), *'Philosophy of Logic'*, Cambridge: Cambridge University Press

würden. Im äusseren Fall könnte man alle Termini der Sprache als logische betrachten: der Begriff der *formalen* Folgerung würde sich dann mit dem der *materialen* Folgerung decken [...]³

Das von Tarski erwähnte Zusammenfallen der beiden Folgerungsbegriffe bedeutet, dass alles, was irgendwie gefolgert werden kann formal gefolgert werden kann. Dann gleicht die ganze Sprache einem Kalkül, dessen Regeln alle intuitiv für gültig befundenen Schlüsse zulassen. Die Bedeutung der Begriffe liegt in ihrer Verwendung, die Angabe der Bedeutung ist die Angabe der Regeln für seine Anwendbarkeit.

Dabei taucht die Frage auf, ob die Angabe der Ableitungsregeln zur Charakterisierung von logischen Konstanten genügt. Dazu gibt es eine interessante Diskussion zwischen A. N. Prior und N. D. Belnap. Prior meint, dass die Angabe der Ableitungsregeln keine genügende Charakterisierung seien. Seine Argumentation⁴ läuft über die Einführung der logischen Konstante 'tonk' mit folgenden Ableitungsregeln: i)  $A \vdash A - \text{tonk} - B$  und ii)  $A - \text{tonk} - B \vdash B$ . Der tonk-Operator führt zur Gültigkeit von  $A \vdash B$ , das hiesse, dass irgendeine Aussage  $B$  aus irgendeiner Aussage  $A$  abgeleitet werden kann. Und das ist eine unhaltbare Konsequenz. Also genügt die Angabe der Ableitungsregeln allein nicht. Der Kritiker dieser Auffassung Nuel D. Belnap fasst diese so zusammen:

[...] it is illegitimate to define *and* as the connective such that (1)  $A - \text{and} - B \vdash A$ , (2)  $A - \text{and} - B \vdash B$ , and (3)  $A, B \vdash A - \text{and} - B$ . We must first, so the moral goes, have a notion of what *and* means, independently of the role it plays as premise and as conclusion.⁵

Um diese Auffassung zu kritisieren, muss Belnap zeigen weshalb es genügt *and* über seine Rolle im Kalkül zu charakterisieren, hingegen eine Charakterisierung von *tonk* mit der Konsequenz  $A \vdash B$  nicht erlaubt ist. Belnap argumentiert, dass auch eine rein inferentielle Charakterisierung von Konstanten nicht völlig willkürlich sei, sondern auf einem „antecedently given context of deducibility“⁶ basiere. (Sogar Prior geht bei seiner polemischen Darstellung einer inferentiellen Charakterisierung von einem gewissen Verständnis von Ableitbarkeit aus: Ohne die Annahme, dass Folgerungen transitiv sind kann  $A \vdash B$  gar nicht aus den beiden *tonk*-Regeln abgeleitet werden.) Belnap geht davon aus, dass die Einführung einer logischen Konstante mit diesem vorgängigen Verständnis vereinbar sein muss. Er kann zeigen, dass dies bei der Einführung von 'and' über die Angabe der *and*-Regeln der Fall ist, bei der Einführung von 'tonk' über die Angabe der *tonk*-Regeln aber nicht.

Ich möchte in meiner Diplomarbeit von einer syntaktischen Charakterisierung der Bedeutung von Begriffen ausgehen und versuchen, ob dabei doch ein Unterschied zwischen logischen und ausserlogischen Zeichen auszumachen ist. Dieser würde sich dann irgendwie aus diesem vorgängigen Verständnis des Folgerungsbegriffs ergeben müssen. Die so ausgezeichneten Begriffe und die dazugehörigen Regeln sind die natürlichen Formalitäten.

---

³A. Tarski (1935), 'Über den Begriff der logischen Folgerung', *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Paris 1935*

⁴A. N. Prior (1960), 'The runabout inference-ticket', *Analysis, Vol. 21*, pp. 38-39

⁵N. D. Belnap, 'Tonk, plonk and plink', *Analysis, Vol 22*, pp. 130-134

⁶N. D. Belnap, 'Tonk, plonk and plink', *Analysis, Vol 22*, p. 131